

ĐỘ RỘNG HOÁN TỬ CỦA NHÓM $SL_{RB,\infty}(D)$ **Nguyễn Thị Thái Hà**

Trường Đại học Giao thông vận tải

Số 3 Phố Cầu Giấy, Phường Lăng Thượng, Quận Đống Đa, Thành phố Hà Nội, Việt Nam

Email liên hệ: hantt_ph@utc.edu.vn

(Ngày nhận bài: 17/4/2024, ngày nhận bài chỉnh sửa: 15/5/2024, ngày duyệt đăng: 21/6/2024)

TÓM TẮT

Mục tiêu của bài báo là phân tích các ma trận vô hạn trong nhóm con $GL_{RB,\infty}(D)$ của nhóm Vershik-Kerov. Chính xác hơn, chúng tôi mô tả nhóm con hoán tử của nhóm $GL_{RB,\infty}(D)$ khi D là vành chia và chỉ ra rằng $\omega(GL_{RB,\infty}(D))=1$ khi D là trường vô hạn hoặc vành chia có số chiều tối đa là 4.

Từ khóa: Vành chia; phân tích ma trận; độ rộng hoán tử

1. Giới thiệu

Cho G là nhóm với tâm $Z(G)$. Với mọi phần tử a, b trong nhóm G , ta định nghĩa *hoán tử* của a và b là $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Đặt G' là nhóm con hoán tử của G , nghĩa là, G' là nhóm con của G được sinh bởi $[a, b]$ với mọi a, b trong G . Khi đó, mỗi phần tử $g \in G' \setminus \{1\}$ tồn tại số nguyên dương n sao cho g có thể biểu diễn dưới dạng tích của n hoán tử không tầm thường $[a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]$ với $i = 1, \dots, n$ và $a_i, b_i \in G \setminus Z(G)$. *Độ dài hoán tử* của $g \in G' \setminus \{1\}$, được ký hiệu là $\ell(g)$, là số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho g có thể được viết dưới dạng tích của n hoán tử trong G . Chúng tôi quy ước $\ell(1) = 0$. *Độ rộng hoán tử* của nhóm G , được ký hiệu là $\omega(G)$, là chặn trên nhỏ nhất của $\{\ell(g) \mid g \in G'\}$. Nói riêng, nếu G là nhóm aben thì $\omega(G) = 0$.

Cho D là vành chia, trong bài báo chúng tôi sử dụng các ký hiệu phổ biến trong lý thuyết nhóm để mô tả các đối tượng. Cụ thể, ký hiệu $GL_n(D)$ đề cập đến nhóm các ma trận khả nghịch cấp n trên vành chia D , trong khi $SL_n(D)$ biểu thị nhóm tuyến tính đặc biệt, bao gồm các ma trận có định thức bằng 1. Ngoài ra, chúng tôi sử dụng $T_n(D)$ và $UT_n(D)$ để chỉ các nhóm của các ma trận tam giác trên, với nhóm $UT_n(D)$ chứa các ma trận tam giác trên có các phần tử thuộc đường chéo bằng 1.

Trong bài viết, chúng tôi tập trung vào việc đánh giá độ rộng hoán tử của nhóm con $GL_{RB,\infty}(D)$ của nhóm Vershik-Kerov $GL_{VK,\infty}(D)$. Nhắc lại rằng nhóm Vershik-Kerov bao gồm các ma trận vô hạn với mỗi cột chứa một số hữu hạn các phần tử khác không. Nhóm con $GL_{RB,\infty}(D)$ bao gồm các phần tử

có dạng $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$ trong đó

$A_1 \in GL_n(D)$ với $n \in \mathbb{N}$ và A_2 là ma trận cấp $n \times \mathbb{N}$. Để hiểu rõ hơn về các nhóm này, chúng tôi đề nghị tham khảo trong tài liệu (Slowik, 2012). Theo Định lý 1.2 trong (Slowik, 2012) nếu R là vành giao hoán, kết hợp, thỏa mãn điều kiện ổn định có hạng nhiều nhất bằng 1 và R chứa θ sao cho $1-\theta$ khả nghịch thì $\omega(GL_{RB,\infty}(R)) \leq 3$. Các kết quả chính của bài viết này bao gồm mô tả nhóm con hoán tử của nhóm $GL_{RB,\infty}(D)$ và đánh giá độ rộng hoán tử của nó.

Ký hiệu $SL_{RB,\infty}(D)$ là tập hợp gồm các ma trận có dạng $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$ trong đó $A_1 \in SL_n(D)$ với $n \in \mathbb{N}$ và A_2 là ma trận cấp $n \times \mathbb{N}$. Chúng tôi chỉ ra rằng nếu D là vành chia thì $SL_{RB,\infty}(D) = [GL_{RB,\infty}(D), GL_{RB,\infty}(D)]$ trừ trường hợp $D = \mathbb{F}_2$ và $n = 2$. Hơn nữa, $\omega(GL_{RB,\infty}(D)) = 1$ nếu D là trường vô hạn hoặc vành chia có số chiều tối đa là 4.

Trong bài báo chúng tôi luôn ký hiệu D là vành chia, $D^* = D \setminus \{0\}$, $D' = [D^*, D^*]$ và $1_n, 1_\infty$ tương ứng là các ma trận đơn vị cấp n và cấp vô hạn.

2. Nội dung

Đầu tiên, chúng tôi cần các bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.1. Cho D là vành chia và $A \in GL_n(D)$. Nếu A không là ma trận vô hướng thì tồn tại ma trận $T \in GL_n(D)$ sao cho $TAT^{-1} = XZY$ với $X', Y \in UT_n(D)$ và $Z = \text{diag}(1, \dots, 1, s)$. Hơn nữa, nếu $A \in SL_n(D)$ thì $s \in D'$.

Chứng minh. Bổ đề này là trường hợp đặc biệt của Bổ đề 2.1 trong tài liệu (Egorchenkova và Gordeev, 2019). ■

Nhắc lại rằng, hai phần tử $a, b \in G$ được gọi là liên hợp trong nhóm G nếu tồn tại $g \in G$ sao cho $b = gag^{-1}$. Mệnh đề dưới đây cho thấy mọi ma trận trong nhóm $UT_\infty(D)$ có thể viết thành dạng hoán tử.

Mệnh đề 2.2. Giả sử vành chia vô hạn D hữu hạn chiều trên tâm và $A \in T_\infty(D)$. Nếu các phần tử trên đường chéo của A là các hoán tử thì tồn tại $B, C \in T_\infty(D)$ sao cho B là ma trận đường chéo, cấp vô hạn với các phần tử đôi một không liên hợp và $A = BCB^{-1}C^{-1}$. Hơn nữa, nếu $A \in UT_\infty(D)$ thì với mỗi ma trận đường chéo B thỏa mãn các phần tử đôi một không liên hợp, tồn tại ma trận $C \in UT_\infty(D)$ sao cho $A = BCB^{-1}C^{-1}$.

Chứng minh. Mệnh đề 2.2 là kết quả của Định lý 1.1 trong tài liệu (Bien và nnk., 2023). ■

Nhận xét 2.3.

1. Cho G là nhóm và $g \in G$. Nếu g là hoán tử thì với mọi $h \in G$, phần tử

hgh^{-1} cũng là hoán tử. Thật vậy, giả sử $g = aba^{-1}b^{-1}$ với $a, b \in G$. Khi đó, với mỗi $h \in G$, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} hgh^{-1} &= haba^{-1}b^{-1}h^{-1} \\ &= (hah^{-1})(hbh^{-1})(hah^{-1})^{-1}(hbh^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

2. Cho $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ là vành chia quaternion thực. Khi đó, theo (Wang, 1950) nhóm con hoán tử của $\mathbb{H}^*$ là tập hợp $\mathbb{H}' = \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in \mathbb{H}^*\}$ và $\mathbb{H}' = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}^* \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$. ■

Bây giờ, chúng tôi chỉ ra kết quả chính đầu tiên.

Mệnh đề 2.4. Cho D là vành chia. Khi đó,

$SL_{RB,\infty}(D) = [GL_{RB,\infty}(D), GL_{RB,\infty}(D)]$ trừ trường hợp $D = \mathbb{F}_2$ và $n = 2$.

Chứng minh

Nếu D là trường thì mệnh đề này được suy ra từ Định lý 4 trong (Draxl, 1980) và Định lý 1.1 trong (Slowik, 2012). Bây giờ, ta xét D là vành chia không giao hoán. Xét $X, Y \in GL_{RB,\infty}(D)$. Khi đó, tồn tại số nguyên dương n sao cho $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$ và $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$ trong đó $X_1, Y_1 \in GL_n(D)$ và X_2, Y_2 là các ma trận cấp $n \times \mathbb{N}$. Dễ thấy

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_1^{-1} & X_2' \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}, \quad Y^{-1} = \begin{pmatrix} Y_1^{-1} & Y_2' \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$$

với X_2', Y_2' là các ma trận cấp $n \times \mathbb{N}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} &XYX^{-1}Y^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^{-1} & X_2' \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1^{-1} & Y_2' \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1 Y_1 X_1^{-1} Y_1^{-1} & Z \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \end{aligned}$$

với

$$Z = X_1 Y_1 X_1^{-1} Y_2' + X_1 Y_1 X_2' + X_1 Y_2 + X_2.$$

Đề ý rằng $XYX^{-1}Y^{-1} \in SL_n(D)$, vì vậy

$$XYX^{-1}Y^{-1} \in SL_{RB,\infty}(D) \text{ và}$$

$$[GL_{RB,\infty}(D), GL_{RB,\infty}(D)] \subseteq SL_{RB,\infty}(D).$$

Bây giờ, ta giả sử $X \in SL_{RB,\infty}(D)$.

Khi đó, tồn tại số nguyên dương n sao

cho X có dạng $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$ với

$X_1 \in SL_n(D)$. Đặt

$$Y = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \text{ và } Z = \begin{pmatrix} 1_n & X_1^{-1} X_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}.$$

Khi đó, $X = YZ$. Theo Định lý 4 trong tài liệu (Draxl, 1980) suy ra

$$X_1 \in [GL_n(D), GL_n(D)]$$

nên

$$Y \in [GL_{RB,\infty}(D), GL_{RB,\infty}(D)].$$

Chọn $T \in SL_n(D)$ sao cho ma trận $(T - 1_n)$ khả nghịch. Khi đó,

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_n & (T - 1_n)^{-1} X_1^{-1} X_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$$

là các ma trận trong $GL_{RB,\infty}(D)$. Hơn nữa,

$$Z = \left[\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_n & (T-1_n)^{-1} X_1^{-1} X_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \right].$$

Vì vậy,

$$YZ \in [GL_{RB,\infty}(D), GL_{RB,\infty}(D)].$$

Do đó,

$$SL_{RB,\infty}(D) \subseteq [GL_{RB,\infty}(D), GL_{RB,\infty}(D)].$$

Chúng minh được hoàn tất. ■

Để chỉ ra kết quả chính tiếp theo, chúng tôi cần bổ đề dưới đây. Ý tưởng chứng minh của bổ đề này được lấy từ chứng minh của Bổ đề 2.6 trong tài liệu (Bien và nnk., 2023).

Bổ đề 2.5. Cho D là vành chia có tâm F . Khi đó, mọi phần tử nằm trong tâm $Z(SL_{RB,\infty}(D))$ của $SL_{RB,\infty}(D)$ có dạng $\begin{pmatrix} \lambda 1_n & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$ với $\lambda \in F \cap D'$.

Chứng minh

Xét $X \in Z(SL_{RB,\infty}(D))$. Khi đó, $X = \lambda 1_\infty$ với $\lambda \in F$. Ta cần chỉ ra rằng $\lambda \in D'$. Theo Mệnh đề 2.4, tồn tại $X_1, X_2, \dots, X_k, Y_1, Y_2, \dots, Y_k \in GL_{RB,\infty}(D)$ sao cho

$$X = X_1 Y_1 X_1^{-1} Y_1^{-1} X_2 Y_2 X_2^{-1} Y_2^{-1} \dots X_k Y_k X_k^{-1} Y_k^{-1}.$$

Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa

$$\text{mãn } X_i = \begin{pmatrix} X_{i_1} & X_{i_2} \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \text{ và } Y_i = \begin{pmatrix} Y_{i_1} & Y_{i_2} \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$$

trong đó $X_{i_1}, Y_{i_1} \in GL_n(D)$ với mọi

$1 \leq i \leq k$. Khi đó, X_i^{-1} và Y_i^{-1} là những ma trận có dạng

$$X_i^{-1} = \begin{pmatrix} X_{i_1}^{-1} & X_{i_2}' \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}, Y_i^{-1} = \begin{pmatrix} Y_{i_1}^{-1} & Y_{i_2}' \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$$

với X_{i_2}', Y_{i_2}' là các ma trận có cấp $n \times \mathbb{N}$. Ma trận $X_i Y_i X_i^{-1} Y_i^{-1}$ có dạng

$$X_i Y_i X_i^{-1} Y_i^{-1} = \begin{pmatrix} X_{i_1} Y_{i_1} X_{i_1}^{-1} Y_{i_1}^{-1} & Z_i \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}, \text{ với}$$

$$Z_i = X_1 Y_1 X_1^{-1} Y_2' + X_1 Y_1 X_2' Y_3^{-1} + X_1 Y_2 X_3^{-1} Y_3^{-1} + X_2 Y_3 X_3^{-1} Y_3^{-1}.$$

Do đó, các phần tử trên đường chéo của

$$X_1 Y_1 X_1^{-1} Y_1^{-1} X_2 Y_2 X_2^{-1} Y_2^{-1} \dots X_k Y_k X_k^{-1} Y_k^{-1}$$

đều thuộc D' . Như vậy n phần tử đầu tiên trên đường chéo của ma trận X

$$\text{đều thuộc } D'. \text{ Do đó, } X = \begin{pmatrix} \lambda 1_n & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$$

với $\lambda \in F \cap D'$. ■

Bây giờ, chúng tôi chỉ ra kết quả chính của bài viết này.

Định lý 2.6. Cho D là vành chia quaternion thực hoặc là trường vô hạn.

$$\text{Khi đó, } \omega(GL_{RB,\infty}(D)) = 1.$$

Chứng minh

Ta cần chứng minh mỗi ma trận A trong nhóm $SL_{RB,\infty}(D)$ đều là hoán tử của các ma trận trong $GL_{RB,\infty}(D)$. Giả sử $A \in SL_{RB,\infty}(D)$.

Trường hợp 1. A là ma trận vô hướng. Theo Bổ đề 2.5 ma trận A có

dạng $A = \begin{pmatrix} \lambda 1_n & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$ với $\lambda \in F \cap D'$.

Theo Bổ đề 2.3, tồn tại $b, c \in D^*$ sao cho $\lambda = bcb^{-1}c^{-1}$. Vì vậy, nếu ta đặt $B = \text{diag}(b, \dots, b); C = \text{diag}(c, \dots, c)$

thì $1_n = BCB^{-1}C^{-1}$ và $A = \begin{pmatrix} \lambda 1_n & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$.

Định lý 2.6 đã được chỉ ra trong trường hợp này.

Trường hợp 2. A không là ma trận vô hướng. Vì A không là ma trận vô hướng trong nhóm $\text{SL}_{RB, \infty}(D)$, nên tồn tại hai số nguyên dương phân biệt i và j sao cho $a_{ij} \neq 0$ hoặc $a_{ji} \neq a_{jj}$. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \in \text{SL}_{RB, \infty}(D)$$

trong đó $A_1 \in \text{SL}_n(D)$. Để ý rằng, ta có thể chọn n lớn hơn i và j . Vì vậy, không mất tính tổng quát ta giả sử rằng A_1 không là ma trận vô hướng trong $\text{SL}_n(D)$. Theo Bổ đề 2.1, tồn tại $T \in \text{GL}_n(D)$ sao cho $TA_1T^{-1} = XZY$ với $X^t, Y \in \mathbb{UT}_n(D)$, $Z = \text{diag}(1, \dots, 1, s)$ với $s \in D'$. Do đó, nếu đặt

$$P = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} ZY & X^{-1}TA_2 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \text{ thì}$$

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}^{-1} = PQ.$$

Theo Nhận xét 2.3, để chỉ ra A là hoán tử, ta chỉ cần chỉ ra PQ là hoán tử. Để ý rằng $Q \in \mathbb{T}_\infty(D)$ là ma trận có tất cả các phần tử trên đường chéo là hoán tử $a_i = b_i c_i b_i^{-1} c_i^{-1}$ với mọi $i \geq 1$. Theo Mệnh đề 2.2, tồn tại ma trận đường chéo, cấp vô hạn S với các phần tử đôi một không liên hợp và $U \in \mathbb{T}_\infty(D)$ sao cho $Q = S^{-1}U^{-1}SU$. Rõ ràng $P^t \in \mathbb{UT}_\infty(D)$, lại theo Mệnh đề 2.2, tồn tại $V \in \mathbb{T}_\infty(D)$ sao cho $P^t = SV^{-1}S^{-1}V$. Suy ra

$$\begin{aligned} PQ &= V^t (S^{-1})^t (V^{-1})^t S^t S^{-1} U^{-1} S U \\ &= V^t S^{-1} (V^{-1})^t U^{-1} S U. \end{aligned}$$

$PQ =$

$$\left[V^t S^{-1} (V^t)^{-1} \right] \left[U^{-1} (V^t)^{-1} \right] \left[V^t S^{-1} (V^t)^{-1} \right]^{-1} \left[U^{-1} (V^t)^{-1} \right]^{-1}.$$

Do đó, PQ là hoán tử. ■

LỜI CẢM ƠN:

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2024-PHIL_KHCB-001.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bien, M. H. & nnk. (2023), *A certain decomposition of infinite invertible matrices over division algebras*. Linear Multilinear Algebra. (71), 1948-1956. DOI: 10.1080/03081087.2022.2091508.

- Draxl, P. (1980), *Eine Liftung Der Dieudonné _Determinante und Anwendungen Die Multiplikative Gruppe Eines Schiefkörpers Betreffend.* Vol. 778. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Egorchenkova, E. A. và Gordeev, N. L. (2019), *Products of commutators on a general linear group over a division algebra.* J. Math. Sci. (243), 561-572. DOI:10.1007/s10958-019-04556-8.
- Slowik, R. (2012), *The lower central series of subgroups of the Vershik–Kerov group.* Linear Algebra Appl. (436), 2299-2310. DOI: 10.1016/j.laa.2011.08.047.
- Wang, S. (1950), *On the commutator group of a simple algebra.* Amer. J. Math. (72), 323-334. DOI: 10.2307/2372036.

COMMUTATOR WIDTH OF A GROUP $SL_{RB,\infty}(D)$

Nguyen Thi Thai Ha

University of Transport and Communications

No.3 Cau Giay Street, Lang Thuong Ward, Dong Da District, Ha Noi, Viet Nam

Email: hantt_ph@utc.edu.vn

(Received: 17/4/2024, Revised: 15/5/2024, Accepted for publication: 21/6/2024)

ABSTRACT

The goal of this paper is to decompose infinite matrices within the subgroup $GL_{RB,\infty}(D)$ of the Vershik-Kerov group. Specifically, we describe the commutator subgroup of $GL_{RB,\infty}(D)$ when D is a division ring and show that $\omega(GL_{RB,\infty}(D))=1$ when D is either an infinite field or quaternion division ring.

Keywords: Division ring; matrix decomposition; commutator width